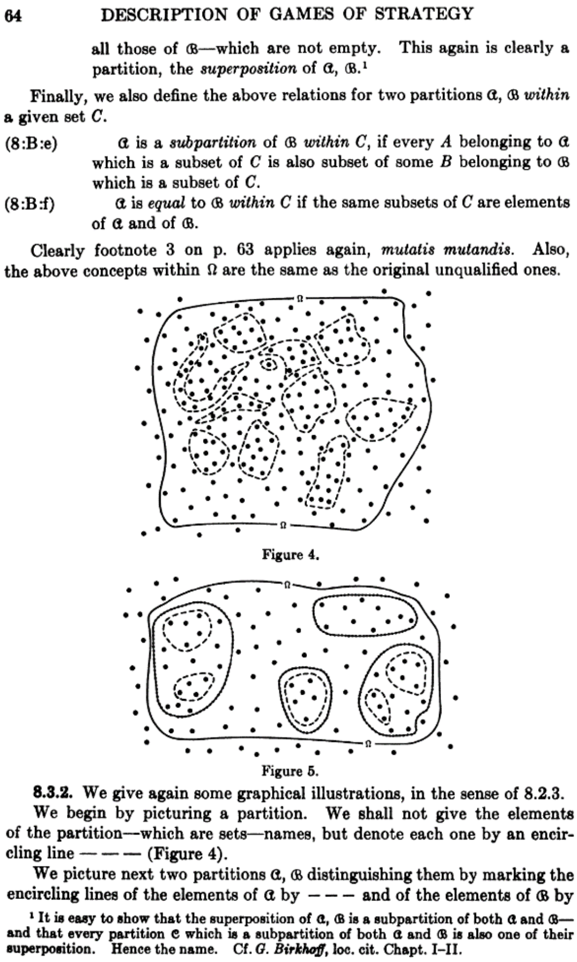
Enkele commentaren en toelichtingen rond wiskunde en spel

Jean Paul Van Bendegem

1. Enkele referenties.

<u>Non-fictie</u>:

Een mooie en zeer toegankelijke inleiding is te vinden in het boekje van F. Thuijsman, *Spelen en delen. Speltheorie, de wiskunde van conflictmodellen*, gepubliceerd in 2005 door Epsilon Uitgaven in Utrecht. Dit boekje is nummer 22 in de Zebra-reeks, een zeer aanbevelingswaardige reeks, bedoeld voor het secundair onderwijs maar ook voor het bredere publiek. Aansluitend bij de lezing, is ook het boekje over oneindigheid zeer interessant: Leon van den Broek en Arnoud van Rooij, *Blik op Oneindig*, nummer 25 in de reeks, gepubliceerd in 2007. De andere volumes in de reeks zijn te vinden op https://www.epsilon-uitgaven.nl/zebra-reeks. De lijst met referenties in deze inleidingen laat een verdiepende verkenning toe.


64 DESCRIPTION OF GAMES OF STRATEGY

all those of $\mathcal{B}$—which are not empty. This again is clearly a partition, the *superposition* of $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.[1]

Finally, we also define the above relations for two partitions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *within* a given set C.

(8:B:e) $\mathcal{A}$ is a *subpartition* of $\mathcal{B}$ *within* C, if every A belonging to $\mathcal{A}$ which is a subset of C is also subset of some B belonging to $\mathcal{B}$ which is a subset of C.

(8:B:f) $\mathcal{A}$ is *equal* to $\mathcal{B}$ *within* C if the same subsets of C are elements of $\mathcal{A}$ and of $\mathcal{B}$.

Clearly footnote 3 on p. 63 applies again, *mutatis mutandis*. Also, the above concepts within Ω are the same as the original unqualified ones.

Figure 4.

Figure 5.

8.3.2. We give again some graphical illustrations, in the sense of 8.2.3.

We begin by picturing a partition. We shall not give the elements of the partition—which are sets—names, but denote each one by an encircling line — — — (Figure 4).

We picture next two partitions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ distinguishing them by marking the encircling lines of the elements of $\mathcal{A}$ by – – – and of the elements of $\mathcal{B}$ by

[1] It is easy to show that the superposition of $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ is a subpartition of both $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$—and that every partition $\mathcal{C}$ which is a subpartition of both $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ is also one of their superposition. Hence the name. Cf. *G. Birkhoff*, loc. cit. Chapt. I–II.

Hierbij ook een weetje dat weinig of geen belang heeft maar gewoon leuk is. De speltheorie is voor het eerst in detail uitgewerkt geweest door John Von Neumann en Oscar Morgenstern in *Theory of Games and Economic Behavior*, verschenen in 1944. De wiskunde haalt in dit boek duizelingwekkende hoogtes maar, zoals de afbeelding laat zien, gebeurt er iets vreemds op pagina 64. In figuur 4 lijken de contouren van de verzamelingen tezamen een olifant te vormen. Het contrast met figuur 5 kan niet groter zijn. Wat is er hier aan de hand? Het antwoord is dat beide auteurs geregeld samenkwamen bij de Morgensterns thuis en, uit dankbaarheid voor hun gastvrijheid, wilden ze een verwijzing hiernaar in het boek opkomen (en niet in de vorm van een saai dankwoord vooraan of achteraan in het boek). Rondkijkend in de woonst van de Morgensterns viel één ding zeer op: de verzameling porseleinen olifanten en olifantjes van mevrouw Morgenstern. En dus lag het antwoord voor de hand.

<u>Fictie</u>:

Het is aangewezen om een onderscheid te maken tussen

A. aan de ene kant, fictie waarin situaties worden gepresenteerd die kunnen geanalyseerd worden met behulp van speltheorie maar waar de auteur zelf die bedoeling niet had,
B. aan de andere kant, fictie waarbij de auteur daadwerkelijk gebruik heeft gemaakt van speltheorie in één of andere vorm.

Ik geef van beide een typisch voorbeeld. Voor geval A kan ik teruggrijpen naar mijn grote passie voor Sherlock Holmes. In het verhaal *The final problem* vluchten Holmes en Watson naar het vasteland vanuit Londen met de trein naar Dover. Die trein heeft één halte, namelijk in Canterbury. Moriarty, aartsvijand van Holmes, meestercrimineel én briljant wiskundige (dit verdient een apart essay), achtervolgt hen, eveneens met de trein. Het probleem stelt zich nu voor Holmes en Watson wat te doen als de trein stopt in Canterbury, uitstappen of niet? De beslissing die ze moeten nemen laat zich mooi in een tabel uitdrukken:

	Moriarty stapt uit in Canterbury	Moriarty stapt niet uit in Canterbury
Holmes & Watson stappen uit in Canterbury	Omdat Moriarty zijn hele gang mee heeft, hebben H & W geen kans	H & W kunnen een volgende trein nemen en nu draait de situatie om: H & W achtervolgen M
Holmes & Watson stappen niet uit in Canterbury	H & W nemen een voorsprong in de achtervolging	Iedereen stapt uit in Dover en, omdat Moriarty zijn hele gang mee heeft, hebben H & W geen kans

Speltheoretisch is het meteen duidelijk dat H & W geen beslissing kunnen nemen: zou M uitstappen in Canterbury, dan moeten zij het niet doen, maar stapt M niet uit in C, dan moeten zij het wel doen. Het vraagt dus de superieure kennis van Holmes om uit te maken wat Moriarty zal doen: uitstappen of niet? (Een bijkomend probleem is natuurlijk dat M, als wiskundige, uiteraard de speltheorie kent en net dezelfde tabel als H & W heeft gemaakt.) Zoals elke Sherlockiaan weet, loopt het verhaal niet goed af want Holmes en Moriarty verdwijnen in de Reichenbach watervallen. Gelukkig heeft Arthur Conan Doyle niet kunnen weerstaan aan de Engelse ponden en Amerikaanse dollars en is Holmes terug levend geworden. (Ik vermeld hier graag dat ik, als Sherlockiaan en lid van *The Sherlock Holmes Society of London*, een publicatie heb in het ledenblad, *The Sherlock Holmes Journal*, over de relatie tussen filosofie en Holmes, waarin, onder andere, de speltheorie aan bod komt. (Volledige referentie: "'Knowledge of Philosophy – Nil' or Sherlock Holmes as Inspiration for Philosophers". *The Sherlock Holmes Journal*, Vol. 22, no. 4 (Eighty-Seventh Issue), 1996, pp. 121-124.)

Voor geval B is er een niet al te uitgebreide literatuur te vinden. Ik pik er een uit die zich ook in het detectivegenre plaatst, namelijk de twee romans van Marshall Jevons, een pseudoniem voor een auteursduo, namelijk William L. Breit en Kenneth G. Elzinga. Beiden zijn economen – hun pseudoniem is een samenstelling van de namen van twee gekende economen, Alfred Marshall en William Stanley Jevons – en de boeken zijn behoorlijk grappig omdat de hoofdpersonages zich absoluut rationeel (in economische zin) gedragen. Twee verhalen zijn al gepubliceerd: *Murder at the Margin* en *The Fatal Equilibrium*.

Er is een bijzonder interessante website in dit verband, namelijk die van Alex Kasman – http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT/ – waar in totaal 1377 titels staan opgelijst van fictiewerken die met wiskunde te maken hebben, waaronder speltheorie, wat een flink korter lijstje van zeven werken oplevert.

2. Het duivels algoritme.

Een van de deelnemers aan de avond over wiskunde en spel, Frank Beckers, heeft mij de volgende vraag voorgelegd:

"Na het einde van de wereld blijken er oneindig veel mensen in de hel te zitten. Wegens plaatsgebrek, weet de duivelse zaakvoerder niets beters dan een tombola te organiseren. Elke dag wordt een gelukkige ziel uitgeloot, die de hel mag verlaten. Iedereen die in de hel zit, heeft bij aankomst een uniek nummer gekregen. Deze nummers gaan in de trommel van de loterij. Het algoritme dat het winnende nummer uitloot, genereert de winnende getallen eenvoudigweg in hun natuurlijke volgorde van klein naar groot: op dag N wint nummer N. Na de 'oneindigste' trekking, zal dus iedereen de hel verlaten hebben. Indien het algoritme anders werkt, bijvoorbeeld enkel even getallen uitloot door op dag N nummer 2 x N te genereren, blijven er ook na de 'oneindigste' trekking oneindig veel mensen in de hel. Mijn vraag is nu: hoeveel mensen blijven er na de 'oneindigste' trekking in de hel, mocht er als algoritme een perfecte toevalsgenerator gebruikt worden?"

Ik heb de avond zelf gezegd dat dit een bijzonder mooie vraag is (wat ook zo is!) die niet met een paar zinnen kan beantwoord worden. Maar hier kan het wel! Eerst een paar kleine punten:

(a) We kunnen de hel vereenvoudigen tot een doos waarin een oneindig aantal briefjes zitten met op elk briefje een natuurlijk getal, zo dat er geen dubbels inzitten en *alle* getallen voorkomen.
(b) Wie het gevoel heeft dat oneindig lang wachten niet veel betekent, kan ik misschien tevreden stellen door het proces in een eindige tijd te laten verlopen. Neem bijvoorbeeld een uur. Deel dat in twee, twee keer een half uur. Deel dat tweede half uur weer in twee, dan krijg je twee kwartieren, één laat je staan, het tweede deel je weer in twee en zo tot in het oneindige. Door deze procedure heb je een uur opgedeeld in een oneindig aantal steeds kleiner wordende intervallen die tezamen precies een uur opleveren.

Op basis van (b) wordt de vraag: wat is de toestand van de doos na één uur? De vraagsteller stelt drie scenario's voor:

<u>Scenario 1</u>: in het eerste interval zoek je in de doos het briefje met 1 op en verwijdert dat uit de doos. Het is duidelijk dat na één uur de doos leeg moet zijn. Eenvoudig argument: als er

nog een briefje in de doos zat, moet daar een getal op staan, zeg bijvoorbeeld 1.233.672, maar dan kan je zonder fout zeggen wanneer dat getal uit de doos is gegaan, namelijk in interval 1.233.672.

Scenario 2: in elk interval neem je een briefje uit de doos. Staat er een even getal op dan gaat het uit de doos. Is het een oneven getal dan gaat het terug in de doos. In dit scenario zal de doos nog altijd oneindig gevuld zijn omdat op zijn minst alle oneven getallen in de doos blijven.

Scenario 3: wat gebeurt als je een toevalsgenerator gebruikt? We kunnen dit voorstellen als volgt. Stel dat er een tweede doos is, de T-doos, eveneens gevuld met een oneindig aantal briefjes met daarop alle getallen, precies een keer. Toevalsmatig te werk gaan, betekent een briefje nemen uit de T-doos, het briefje zoeken met het getal in kwestie in de eerste doos en dat verwijderen uit de doos. Wat kan er gebeuren? Het antwoord luidt dat alles afhangt van hoe de toevalsgenerator werkt: leggen we een gekozen briefje uit de T-doos terug of niet na trekking? Dat geeft twee mogelijkheden:

- Zonder terugleggen: beide dozen zullen na één uur leeg zijn. Het argument hoef ik niet te herhalen,
- Met terugleggen: het antwoord hier is dat alles mogelijk is, van 1 tot oneindig. Waarom? Doordat de briefjes in de T-doos terug worden gelegd, is het perfect mogelijk om bij een latere trekking hetzelfde briefje te trekken. We moeten dan wel afspreken dat, als het briefje al weg is uit de eerste doos, je simpelweg het briefje teruglegt en een volgende trekt. Waarom is alles mogelijk?

Scenario 3.1.: stel dat je keer op keer uit de T-doos hetzelfde getal trekt. Dan is alleen dat getal uit de eerste doos verdwenen en blijft ze oneindig gevuld.

Scenario 3.2.: stel dat je alle getallen hebt getrokken uit de T-doos op één na dan zal de eerste doos nog juist het briefje bevatten met dat getal erop, er zit dus nog 1 briefje in de doos.

Scenario 3.3.: het vorig scenario laat zich veralgemenen want stel dat alle getallen getrokken zijn uit de T-doos behalve een eindig aantal, dan zal dat aantal in de eerste doos overblijven, dus alle uitkomsten zijn mogelijk.

Wat bijzonder interessant is aan de vraagstelling is dat de vraag aansluit bij een interessante discussie in de filosofie van de natuurkunde en de wiskunde, namelijk het probleem van de zogenaamde “supertasks”. Een supertask is een opdracht die in één uur wordt uitgevoerd, oneindig opgedeeld zoals hierboven beschreven en waar telkens de vraag wordt gesteld wat de toestand is na één uur. Een mooi overzicht is te vinden in het lemma over supertasks in de *Stanford Encyclopedia of Philosophy*: https://plato.stanford.edu/entries/spacetime-supertasks/. Om deze korte commentaar af te ronden, hierbij een scenario dat alle verbeelding tart.

Scenario ‘Huh!?’: stel dat de oneindige mensheid in een mooie geordende rij staat aan te schuiven voor de poorten van de hel, netjes genummerd van 1 naar 2 naar 3 … De duivel gaat als volgt te werk:

- in het eerste interval gaan 1 tot en met 10 naar binnen maar de duivel krijgt toch een beetje wroeging en zegt tegen 1 dat die naar de hemel mag. De rest blijft voorlopig binnen,
- in het tweede interval komen 11 tot en met 20 binnen en nu laat de duivel 2 gaan,
- in het derde interval gaan 21 tot en met 30 binnen en 3 mag naar buiten.

…

Het algemene schema is, hoop ik, duidelijk. Wie graag de algemene formule wil hebben, dit is ze: in interval N gaan 10.(N – 1) + 1 tot en met 10.N naar binnen en N gaat naar buiten.

Vraag: na één uur, hoeveel mensen zitten er finaal in de hel? Het krankzinnige antwoord is: niemand. De spontane reactie is dat dat niet kan want in ieder interval zijn er 10 – 1 dus 9 mensen naar binnen gegaan, het moet daar oneindig druk zijn! Maar het tegenargument is dit: stel dat er nog iemand in de hel zit en die mens heeft een bepaald nummer, stel K. Dan weet je perfect wanneer deze mens de hel heeft verlaten, namelijk in het interval K. Dus moet de hel leeg zijn. De duivel heeft iets te veel wroeging gehad!

3. Slotgedachte.

Misschien had Blaise Pascal wel gelijk toen hij schreef in *Les Pensées* dat “Le silence éternel de ces espaces infinis m’effraie” (“De eeuwige stilte van die oneindige ruimtes beangstigt mij”). Vreemd genoeg staat in datzelfde boek een prachtig argument om een vroom leven te leiden dat, uiteraard *avant la lettre*, gebaseerd is op speltheorie! Zonder verdere commentaar, dit is het argument in tabelvorm (en de conclusie mag je zelf trekken):

	God bestaat	God bestaat niet
Ik leid een vroom leven	Eeuwige beloning!!!	Misschien heb ik veel tijd verloren maar ben ik wel een goed mens geweest
Ik leid geen vroom leven	Eeuwige verdoemenis!!!	Misschien heb ik wel veel lol gehad maar het leven is echt wel eindig en zo voorbij